

因式分解进阶二（加油站）

一、换元法

1. 直接换元法

1. 因式分解： $(x^2 - x)(x^2 - x - 14) + 24$ 的结果是（ ）。

A. $(x^2 - x - 3)(x^2 - x - 8)$

B. $(x^2 - x - 2)(x^2 - x - 12)$

C. $(x - 2)(x + 1)(x - 4)(x + 3)$

D. $(x + 1)(x + 2)(x - 4)(x + 3)$

2. 若 $(x + y)(x + 2 + y) = 15$ ，则 $x + y =$ _____。

3. 因式分解： $(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24$ 。

4. 因式分解： $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3(x^2 + 4x + 8) + 2$ 。

5. 分解因式： $(x^2 + 4)(x^2 + 6) - 48$ 。

6. 分解因式：

(1) $(x^2 - x - 3)(x^2 - x - 5) - 8$.

(2) $(x^2 - x - 3)(x^2 - x - 5) - 3$.

(3) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$.

7. 回答下列问题 .

(1) 填空： $a^2 + 6a + \underline{\hspace{2cm}} = (a + \underline{\hspace{2cm}})^2$.

(2) 阅读，并解决问题：

分解因式 $(a + b)^2 + 2(a + b) + 1$.

解：设 $a + b = x$ ，则原式 $= x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = (a + b + 1)^2$.

这样的解题方法叫做“换元法”，即当复杂的多项式中，某一部分重复出现时，我们用字母将其替换，从而简化这个多项式．换元法是一个重要的数学方法，不少问题能用换元法解决．请你用“换元法”对下列多项式进行因式分解：

① $(m + n)^2 - 14(m + n) + 49$.

② $(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 4x + 6) + 4$.

2. 先变形再换元

8. 因式分解： $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6) + x^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 分解因式： $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$.

10. 分解因式： $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$.

11. 分解因式： $(x^2-1)(x+3)(x+5)+12$.

12. 分解因式：

(1) $(x^2+6x+8)(x^2+14x+48)+12$.

(2) $(x^2+3x+2)(4x^2+8x+3)-90$.

13. 分解因式：

(1) $(a-1)(a-2)(a-3)(a-4) - 24$.

(2) $(x^2 + 3x + 2)(3 + 8x + 4x^2) - 90$.

(3) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) - 3x^2$.

3. 平均值换元

14. 分解因式： $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) - 15x^2$.

15. 在有理数范围内分解因式 .

(1) $a^3 - b^3 + a^2b - ab^2$.

(2) $(c^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2$.

(3) $(a^2 + 5a + 4)(a^2 + 5a + 6) - 120$.

二、拆项、添项法

16. 分解因式： $4x^4 + 1$.

17. 因式分解： $x^4 - 3x^2 + 1$.

18. 因式分解： $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

19. 分解因式： $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3$.

20. 因式分解：

(1) $x^3 - 4x^2 + 6x - 4$.

(2) $2x^4 + x^3 + 7x^2 + 4x - 4$.

21. 因式分解：

(1) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

(2) $a^3 + 3a^2 + 3a + 2$.

22. 分解下列因式：

(1) $a^4 - 11a^2 + 1$.

(2) $a^4 + 5a^2 + 9$.

(3) $9x^4 + 2x^2y^2 + y^4$.

23. 分解因式：

(1) $x^4 + 3x^2 + 4$.

(2) $x^8 + x^4 + 1$.

(3) $x^4 - 7x^2y^2 + 81y^4$.

(4) $x^2 - y^2 + 2x + 6y - 8$.

24. 系数引导型添拆项法：

分解下列因式：

(1) $x^3 - 3x^2 + 4$.

(2) $x^3 + x^2 - 12$.

(3) $x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 3$.

三、立方和、立方差公式

25. 利用立方和、立方差公式填空：

$(2m + n^2)(4m^2 - 2mn^2 + n^4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

26. 计算： $(x+1)(x^2-x+1)$.

27. 已知 $a+b=3$, 且 $ab=2$, 则 a^3+b^3 的值为 _____ .

28. 已知 $x-y=3$, $xy=5$, 则 x^3-y^3 的值为 _____ .

29. 已知 $x-y=4$, 求 x^3-y^3-12xy 的值 .

30. 已知 $x+y=10$, $x^3+y^3=280$, 求 x^2+y^2 的值 .

31. 利用立方和 (差) 公式填空 :

(1) $(x+2)(x^2-2x+4) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) $(2x-1)(4x^2+2x+1) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) $(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(4) $8a^3+125b^3 = (2a+5b) \underline{\hspace{2cm}}$;

(5) $\frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{8}b^3 = \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right) \underline{\hspace{2cm}}$.

32. 计算

(1) $(1-x)(x^2+x+1)$.

(2) $\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x+y\right)^2$.

33. 因式分解：

(1) $(a^2+4b^2-4)^2-4a^2b^2$

(2) $(5a^2-3b^2)^2-(3a^2-5b^2)^2$

(3) a^4b-ab^4

(4) $2x^4+54xy^3$

(5) a^6+b^6

34. 已知 $x+y=3$, $xy=2$, 求

(1) $x-y$.

(2) x^3+y^3 .

35. 解答下列各题 .

(1) 已知 $a + b = 4$, $ab = 2$, 求 $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$ 的值 .

(2) 已知 $a + b = 1$, $a^2 + b^2 = 3$, 求 $a^3 + b^3$ 和 $a^4 + b^4$ 的值 .